LAHENDUSED 10.KLASS

1. Vastus: 50 eurot

Lahendus:

Olgu Anne kavatses kulutada pastapliiatsitele x eurot, vihikutele $x + 10$ ja kokku ta kavatses kulutada $x + x + 10 = 2x + 10$ eurot.

Kui ta valib 40% soodustust pastapliiatsitele, siis pastapliiatsite eest peab ta maksma $0{,}6x$ eurot, ja kogu ostusumma on sel juhul $0{,}6x + x + 10 = 1{,}6x + 10$.

Kui Anne valib 16% soodustust kogu ostuhinnast,

siis ta peab maksma $0{,}84(2x + 10)$.

Kuna Anna arvutas välja, et ostusumma ei sõltu sellest, millise soodustuse ta valib, siis

$$0{,}84(2x + 10) = 1{,}6x + 10$$
$$1{,}68x + 8{,}4 = 1{,}6x + 10$$
$$0{,}08x = 1{,}6$$
$$x = 20$$

20 eurot kavatses Anna kulutada pastapliiatsitele, järelikult vihikutele ta plaanis kulutada 20+10=30 eurot ning kokku $30 + 20 = 50$ eurot.

Hindamine:

Avaldatud kogu summa, mida Anne kavatses kulutada	1p
Avaldatud summad, mida Anne peab maksma iga soodustuse jaoks	3p
Koostatud võrrand	1p
Leitud summa, mida Anne kavatses kulutada pastapliiatsitele	1p
Leitud kogu summa, mida Anne plaanis kulutada	1p
	7p

Märkus: Ainult õige vastuse eest anda 2p.

Kui vastus leitud mingite konkreetsete arvudega, siis anda maksimaalselt 4p

2. **Vastus: Jah**

Lahendus:

Antud arv tegurdub kujule

$$123456789 \cdot \underbrace{10000000010000000010 \ldots 0001}_{73 \text{ numbrit}},$$

Millest esimene tegur jagub 9-ga, sest selle ristsumma $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ jagub 9-ga. Teises teguris on kokku üheksa nullist erinevat numbrit (ehk ühte), mistõttu teise teguri ristsumma on võrdne 9-ga. Järelikult ka teine tegur jagub 9-ga.

Kuna kumbki tegur jagub 9-ga, siis võime kummagi teguri kirja panna kujul $123456789 = 9k$ ning $\underbrace{10000000010000000010 \ldots 0001}_{73 \text{ numbrit}} = 9m$, kus k ja m on täisarvud. Seega saame esialgset arvu esitada kujul

$$9k \cdot 9m = 81km$$

Kuna viimane jagub 81-ga teguri 81 tõttu, siis peab ka esialgne arv jaguma 81-ga.

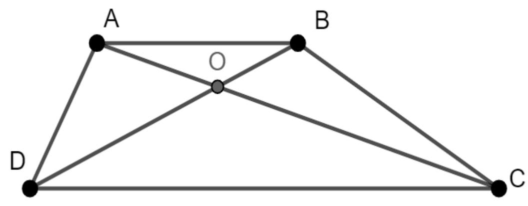
Hindamine:

Etteantud arvu tegurdamine	2p
Näitamine, et tegurdatud kujul esimene tegur jagub 9-ga	1p
Näitamine, et tegurdatud kujul teine tegur jagub 9-ga	1p
Järeldamine, et kogu etteantud arv peab jaguma 81-ga	3p
	7p

Märkus: Ainult õige vastuse eest anda 1p.

3. **Vastus:** $\mathbf{3\frac{1}{9}\,cm^2}$**.**

<u>Lahendus:</u>



Trapetsi pindala valemist saame leida trapetsi kõrgus: $h = \frac{2S}{a+b}$.

$h = \frac{2\cdot 18}{2+7} = 4\ (cm)$

Kolmnurga BCD kõrgus on võrdne trapetsi kõrgusega ning kolmnurga BCD pindala on $S_{BCD} = \frac{4\cdot 7}{2} = 14\ (cm^2)$.

Kolmnurgad ABO ja CDO on sarnased, sest

$\angle BAO = \angle OCD, \angle ABO = \angle ODC$ ($AB \parallel CD$ ning nurgad on põiknurgad)

$\angle AOB = \angle COD$ (tippnurgad).

Sarnasustegur on $\frac{2}{7}$.

Olgu h_1 on kolmnurga AOB kõrgus ning h_2 on kolmnurga COD kõrgus.

Kuna kolmnurgad on sarnased, siis $\frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{7}$. Samas $h_1 + h_2 = h$

Olgu x on üks osa, siis $h_1 = 2x$, $h_2 = 7x$ ning $2x + 7x = 4$, kust $x = \frac{4}{9}$

Ning $h_1 = \frac{8}{9}$ ja $h_2 = \frac{28}{9}$.

$S_{COD} = \frac{\frac{28}{9}\cdot 7}{2} = 10\frac{8}{9}\,(cm^2)$

$$S_{BOC} = S_{BCD} - S_{COD}$$

$S_{BOC} = 14 - 10\frac{8}{9} = 3\frac{1}{9}\ (cm^2)$

<u>Hindamine:</u>

Leitud trapetsi kõrgus	1p
Leitud kolmnurga BCD (või ABD) pindala	1p
Põhjendatud, et kolmnurgad ABO ja CDO on sarnased	2p
Leitud kolmnurga COD (või AOB) pindala	2p
Leitud kolmnurga BOC pindala	<u>1p</u>
	7p

4. **Vastus:** $\frac{1}{2}$ **või** $-\frac{27}{2}$

Lahendus:

Olgu võrrandi lahendid m ja m^2

Vastavalt Viète'i teoreemile:

$m \cdot m^2 = \frac{a}{4}$, kust $m^3 = \frac{a}{4}$ ja $m^2 + m = \frac{3}{4}$.

Lahendades võrrandi $m^2 + m - \frac{3}{4} = 0$ saame: $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = -\frac{3}{2}$.

Kuna $\frac{a}{4} = m^3$, siis $a = 4m^3$

$a = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$ või $a = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{2}$

Hindamine:

Viète'i teoreemi kasutamine võrrandis (saadud võrrandid $m^3 = \frac{a}{4}$ ja $m^2 + m = \frac{3}{4}$)	3p
Leitud võrrandi lahend (leitud m_1 ja m_2)	2p
Leitud mõlemad *a* väärtused	2p
	7p

Märkus: Ainult õige vastuse eest anda 2p (kui on leitud vaid üks väärtus, siis 1p)

5. **Vastus: 6**

Lahendus:

Märkame, et Ants saab jagada münte hunnikute vahel nii, et igaühes oleks üks münt ilma trahvipunktide saamist siis ja ainult siis, kui esialgse hunniku müntide arv on kahe aste. Tõesti, kui esialgse müntide arv on 2^n siis pooleks jagamisel on kaks hunnikut 2^{n-1} ning igaühte saab jagada kaheks hunnkikuks 2^{n-2} ja nii kuni kõik hunnikud on 2^0, ehk 1.

$2020 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 4 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2$

Jagame hunnikuid järgmiselt:

2^{10} ja $2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2$

2^9 ja $2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2$

2^8 ja $2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2$

2^7 ja $2^6 + 2^5 + 2^2$

2^6 ja $2^5 + 2^2$

2^5 ja 2^2

Hunnikud, kus müntide arv on 2^n saab muuta hunnikuteks kus igaühes on 1 münt trahvipunktide saamiseta, ehk kokku tuleb 6 trahvipunkti.

Nüüd tõestame, et vähemat arvu ei saa saavutada.

Oletame, et esimese jagamise teeme nii, et üheski kahest hunnikust ei ole 2^n münte. Küll aga ühes hunnikus on vähemalt 2^9 münte. Kui jagada seda veel kaheks, siis ühes hunnikus on vähemalt 2^8 münte jne. Samas iga sammuga tekkib ka rohkem hunnike mida tuleb omakorda jagada, ning mis pole kahe aste. Iga selline hunnik toob endaga trahvipunkte kuni hunnikutes pole jäänud 2^n münte mis aga viib järelduseni, et parim viis on jagada hunnikuteks, kus igaühes on 2^n münte.

Hindamine:

Märkamine, et kui müntide arv hunnikus on 2^n siis saab neid jagada hunnikuteks, kus igaühes on 1 münt trahvipunkte saamata	2p
2020 lahti kirjutamine kahe aste summana	1p
Hunnikute jagamise näide	1p
Tõestus, et vähem ei saa	3p
	7p

Märkus: ainult õige vastuse eest anda 2 punkti.